確定特異点を持つ微分方程式と関数等式 II

田中　洋平

Differential equation with regular singularity and functional equation II

Yôhei TANAKA

概 要

原点に確定特異点を持つ 2 階の常微分方程式の正則解が満たす関数等式について調べる．これは前論文 [3] で与えた対応の逆を考えることになる。

はじめに

$z=0$ の回りで正則な関数 $f(z)$ 全体のなす整域を H とし，H の唯一の極大イデアルを M，H の単数群を U で表す.

$$H=\{f(z)|f(z)\text{ は }z=0\text{ で正則 }\}$$
$$M=\{f(z)|f(0)=0\}=zH$$
$$U=\{f(z)|f(0)\neq 0\}=H\setminus M$$

とおく.

[3] では，$w(z)\in M^2=z^2H$，$u(0)=1$ をとってきて関数等式

$$u(z)f(w(z))=f(z)$$

を考えると，$a(z)$，$b(z)\in H$，$a(0)=1$ をうまく選んで $z=0$ で確定特異点を持つ微分方程式

$$zy''(z)+a(z)y'(z)+b(z)y(z)=0$$

が対応して，関数等式を満たす正則関数が対応する微分方程式の正則解として特徴付けられることを示した。

本論文では，逆に微分方程式の係数 $a(z)$ と $b(z)$ から，関数等式を定める $w(z)$ と $u(z)$ を導くことを目的とする.

1　関数等式から微分方程式

[3] の結果を述べる.

$u(z)\in U$ で $u(0)=1$，$w(z)\in M^2$ で $w''(0)\neq 0$ をとってきて,

$$u(z)f(w(z))=f(z) \tag{1}$$

という関数等式と，$a(z)\in H$ で $a(0)=1$，$b(z)\in H$ をとってきて,

$$zy''(z)+a(z)y'(z)+b(z)y(z)=0 \tag{2}$$

という微分方程式を考える．関数等式を満たす正則関数 $f(z)$ で $f(0)=1$ となるものが唯一つあり，また，微分方程式を満たす正則解 $y(z)$ で $y(0)=1$ となるものが唯一つある．この関数等式 (1) と微分方程式 (2) の間に次の関係がある.

平成14年 9 月27日受付

定理 1. ([3] 定理 6)

$u(z) \in U$ で $u(0)=1$，$w(z) \in M^2$ で $w''(0) \neq 0$ に対して，$a(z), b(z) \in H$ で

$$a(w(z)) = \frac{w(z)}{zw'(z)}a(z) + \frac{2u'(z)w'(z)w(z) + u(z)w''(z)w(z)}{u(z)w'(z)^2} \tag{3}$$

$$zb(w(z)) = \frac{w(z)}{w'(z)^2}b(z) + \frac{zu''(z)w(z) + a(z)u'(z)w(z)}{u(z)w'(z)^2} \tag{4}$$

を満たすものが唯一組存在して，$a(0)=1$ となる．

そして，関数等式 (1) を満たす正則関数 $f(z)$ で $f(0)=1$ となるものと，微分方程式 (2) の正則解 $y(z)$ で $y(0)=1$ となるものは一致する．

2 微分方程式から関数等式

定理 1 では $u(z)$ と $w(z)$ から $a(z)$ と $b(z)$ を導いた．逆に $a(z)$，$b(z)$ から $u(z)$, $w(z)$ を決定したい．

定理 2. $a(z)$, $b(z) \in H$ で $a(0)=1$ とする．このとき関係式 (3) と (4) を満たすような $u(z) \in U$, $w(z) \in z^2U$ がある．この $u(z)$ と $w(z)$ は $u(0) \neq 0$ と $w''(0) \neq 0$ を与えると 唯一組定まる．

$a(z)$ と $b(z)$ を与えると，関係式 (3) と (4) は，$u(z)$ と $w(z)$ に関する連立非線型常微分方程式と見ることができる．定理 2 はこの微分方程式の初期値問題が解けることを言っている．

定理 2 の証明.

関係式 (3) から

$$\frac{u'(z)}{u(z)} = \frac{1}{2}\Big(a(w(z))\frac{w'(z)}{w(z)} - \frac{w''(z)}{w'(z)} - \frac{a(z)}{z}\Big) \tag{5}$$

となる．$w(z) \in z^2U$ をとってくると，$a(0)=1$ なので (5) の右辺は正則になるので，$u(z)$ が定数倍を除いて定まる．従って，$w(z)$ が定まると，$u(0)$ を与えることにより $u(z)$ が決まる．後は $w(z)$ の定まり方を調べる．

$$\frac{u''(z)}{u(z)} = \Big(\frac{u'(z)}{u(z)}\Big)^2 + \Big(\frac{u'(z)}{u(z)}\Big)'$$

を用いて (4) の右辺の $\dfrac{u'(z)}{u(z)}$ と $\dfrac{u''(z)}{u(z)}$ の項に，(5) の右辺とその微分を代入して整理すると，

$$\varphi(z) = a(z)\big(2 - a(z)\big) - 2za'(z) + 4zb(z) \tag{6}$$

とおいて，

$$\frac{\varphi(z)}{z^2} - \Big(\frac{w'(z)}{w(z)}\Big)^2\varphi\big(w(z)\big) + 3\Big(\frac{w''(z)}{w'(z)}\Big)^2 - 2\frac{w^{(3)}(z)}{w'(z)} = 0 \tag{7}$$

となる．

(6) の $\varphi(z)$ は正則で，$a(0)=1$ なので $\varphi(0)=1$ となる．次の補題を示せば，初期値 $w''(0)$ を与えると $w(z)$ の定まることがわかり，定理が証明される．

補題 3. $\varphi(z) \in H$ で $\varphi(0)=1$ となっているとき，$w(z) \in z^2U$ に関する非線型微分方程式

$$w^{(3)}(z) = \frac{3}{2}\frac{\big(w''(z)\big)^2}{w'(z)} - \frac{1}{2}\frac{\varphi\big(w(z)\big)\big(w'(z)\big)^3}{w(z)^2} + \frac{1}{2}\frac{\varphi(z)w'(z)}{z^2} \tag{8}$$

は解を持ち，その解は $w''(0) \neq 0$ を与えると唯一つに定まる．

(8) を $\dfrac{2}{w'(z)}$ 倍して移項するとすると (7) が得られる．

補題の証明．
(8) の右辺は $w(z) \in z^2U$ より高々1位の極を持つが，$\varphi(0)=1$ を用いて $\dfrac{1}{z}$ の係数を計算すると，

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\cdot 8\varphi(0) + \frac{1}{2}\cdot 2\varphi(0) = 3 - 3\varphi(0) = 0$$

となり，この右辺は正則になる．

$$\varphi(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n z^n$$

$$w(z) = \sum_{n=2}^{\infty} w_n z^n$$

とおく．$w_2 = \dfrac{w''(0)}{2}$ である．

$n=0,1,2,\ldots$ のとき，(8) の右辺の z^n の係数は

$$c_n w_{n+3} + \frac{\big(w_2,\ldots,w_{n+2},\varphi_1,\ldots,\varphi_{n+1} \text{ の多項式}\big)}{w_2^{n+1}}$$

となる．ここで

$$\begin{aligned} c_n &= 3\Big(2\cdot\frac{(n+3)(n+2)}{2} - \frac{n+3}{2}\Big) - 4\Big(3\cdot\frac{n+3}{2} - 2\Big) + \frac{n+3}{2} \\ &= 3n^2 + 8n + 5 \end{aligned}$$

である．

一方 (8) の左辺の z^n の係数は $(n+3)(n+2)(n+1)w_{n+3}$ なので，係数を比較して

$$\big((n+3)(n+2)(n+1) - c_n\big)w_{n+3} = \frac{\big(w_2,\ldots,w_{n+2},\varphi_1,\ldots,\varphi_{n+1} \text{ の多項式}\big)}{w_2^{n+1}}$$

となるが，

$$(n+3)(n+2)(n+1) - c_n = (n+1)^3 \neq 0$$

なので w_{n+3} は w_2，…，w_{n+2} が定まると唯一つに決まる．従って，$w_2 \neq 0$ を定めると $w(z)$ が一意的に求まる． □

参考文献

[1] 福原満州雄：常微分方程式，岩波全書 116

[2] 田中洋平： 算術幾何平均について, 東京商船大学研究報告（自然科学）第５１号, pp. 11–13, (2000)

[3] 田中洋平：確定特異点を持つ微分方程式と関数等式, 東京商船大学研究報告（自然科学）第５２号，pp. 5–9, (2001)